La programmation linéaire

Exercices corrigés

Exercice 1

Une entreprise désire fabriquer deux pièces A et B dans un délai d'un mois. Les prix respectifs des deux pièces de 138 € par série de 100 pièces A, et de 136 € par série de 100 pièces B.

La fabrication des deux pièces A et B nécessite un passage dans trois ateliers. Le nombre d'unités d'œuvre nécessaire dans chaque atelier à la fabrication des pièces A et B est indiqué dans le tableau suivant :

	Nombre d'unités, (par série de 100 pièces A)	Nombre d'unités, (par série de 100 pièces B)	Coût variable d'une unité d'œuvre
Atelier T_1	2	1	10
Atelier T_2	1	4,5	12
Atelier T_3	4	3	14

Les capacités disponibles en heures sont les suivantes :
- 200 unités d'œuvre pour l'atelier T_1 ;
- 540 unités d'œuvre pour l'atelier T_2 ;
- 480 unités d'œuvre pour l'atelier T_3.

Compte tenu de ces informations, on vous demande de traiter les questions suivantes :

1. *Formuler le programme linéaire.*

2. *Représenter le graphique correspondant.*

3. *Quelles quantités de pièces A et de pièces B faut-il fabriquer pour que l'entreprise obtienne la marge maximum compte tenu des contraintes de fabrication ?*

Exercice 2

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Min } Z = 120y_1 + 132y_2 + 60y_3$$

Avec les contraintes suivantes :

$$6y_1 + 6y_2 + 2y_3 \leq 120$$
$$2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 90$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

1. *La résolution graphique est-elle possible ?*

2. *Formuler le programme dual.*

Exercice 3

Soit une entreprise fabriquant deux produits x_1 et x_2, passant tous deux dans les ateliers découpe (A1) et finition (A2).

Atelier	Découpe	Finition
Temps de fabrication de x_1	2 heures	3 heures
Temps de fabrication de x_2	2 heures	1 heure
Capacité maximale de production	200 heures	100 heures

Sachant que les marges unitaires des produits x_1 et x_2 sont respectivement de 20 € et 10 €, quelles seront les quantités à produire pour maximiser le résultat ?

Exercice 4

La Société VTT a décidé de limiter sa production aux modèles A, I et T. Le temps nécessaire au montage de chacun de ces modèles, le coût des pièces utilisées, et la marge unitaire, sont indiqués dans le tableau suivant :

	Modèles		
	A	I	T
Temps de montage (en heures)	1	1,5	3
Coût des pièces (en euros)	80	90	120
Marge unitaire (en euros)	32	45	72

Compte tenu des disponibilités en main d'œuvre et en trésorerie, le programme initial de fabrication quotidien est fixé à 6 unités A, 12 unités I et 12 unités T, soit une production totale de 30 VTT par jour.

1. *Calculer le temps total de montage, le coût total des pièces et la marge totale correspondant à ce programme.*

2. *L'entreprise cherche à maximiser la marge, sans augmenter la durée totale de montage et le coût total des pièces. Elle peut, par contre, admettre une production totale maximale de 35 VTT par jour.*

a. *Écrire la forme standard du problème à résoudre.*

On notera x, y et z les nombres respectifs de VTT A, I et T fabriqués par jour, et e_1, e_2 et e_3 les variables d'écart correspondant respectivement à la production totale, au temps de montage et au coût des pièces.

b. *Déterminer par la méthode du simplexe le programme de fabrication qui maximise la marge totale.*

c. *Calculer l'augmentation de la marge totale correspondant à cette solution par rapport au programme initial en admettant que le dernier tableau est le suivant :*

	x	y	z	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$	
		0	0	1	1 / 3	– 1 / 60	5
	– 1 / 3	0	1	0	1	– 1 / 60	10
	4 / 3	1	0	0	– 4 / 3	1 / 30	20
Fonction économique	– 4	0	0	0	– 12	– 3 / 10	– 1 620

Exercice 5

La SAG, installée dans la région parisienne, fabrique deux produits tout à fait nouveaux, S et T. L'unité de mesure est le mètre cube (m^3).

Les marchés de ces deux produits peuvent être considérés, pour l'instant, comme illimités.

La fabrication de ces deux produits nécessite un passage dans trois ateliers pour lesquels on dispose des renseignements suivants pour un mois d'activité :

	Nombre d'unités d'œuvre nécessaires pour un m^3 de S	Nombres d'unités d'œuvre nécessaires pour un m^3 de T	Coût variable d'une unité d'œuvre (en euro)
Atelier n° 1	3	2	40
Atelier n° 2	3	7	45
Atelier n° 3	8	6	60

Les prix de vente actuels de ces deux produits s'élèvent respectivement à 395 € le m^3 pour le produit S et 920 € le m^3 pour le produit *T*. La direction se fixe comme objectif la maximisation la marge sur coûts variables totale.

Les capacités de chaque atelier sont limitées à :

– 400 unités d'œuvre pour l'atelier n° 1,

– 1 000 unités d'œuvre pour l'atelier n° 2,

– 1 100 unités d'œuvre pour l'atelier n° 3.

On appelle x_1 le nombre de produits S et x_2 le nombre de produits S, *T*, e_1, e_2, et e_3, les variables d'écart associées respectivement aux ateliers 1, 2, 3.

1. *Écrire le programme linéaire sous forme canonique.*

2. *Présenter le premier tableau selon la méthode du simplexe. Effectuer la première transformation.*

3. *Si le dernier tableau du simplexe est le suivant :*

Base				x_5	x_6	second membre
x_1	1	0	0	3 / 19	853 / 2	850 / 19
e_1	0	0	1	1 / 19	– 285 / 2	315 / 19
x_2	0	1	0	4 / 19	– 1 137 / 2	2 350 / 19
Coefficients économiques	0	0	0	– 60 / 19	– 17 005 / 2	– 557 750 / 19

Indiquer quel est :

a. *le nombre de m³ de chaque type de produit à fabriquer,*

b. *le nombre d'unités d'œuvre qui reste disponible dans chaque atelier,*

c. *la marge totale sur coûts variables obtenue.*

Exercice 6

L'entreprise P est chargée de conditionner des articles référencés A, B, C sous forme de colis de trois types, notés x_1, x_2 et x_3.

Il lui est imposé de placer :

– 1 article A, 2 articles B, 2 articles C dans le colis x_1,

– 1 article A, 3 articles B, 2 articles C dans le colis x_2,

– 1 article A, 5 articles B, 3 articles C dans le colis x_3.

L'entreprise a un stock de 1 235 articles A, 4 004 articles B, 2 880 articles C.

Trouver les nombres x_1, x_2 , x_3 de colis dans chacun des types afin d'épuiser le stock en articles A, B, C.

Exercice 7

Une entreprise fabrique 2 produits A et B dans deux ateliers 1 et 2. Pour le mois m, vous disposez des informations suivantes.

L'atelier 1 fabrique un produit A en 2 h 30 et un produit B en 5 heures. La capacité de l'atelier est 1 000 heures.

L'atelier 2, dont la capacité est de 900 heures, termine la fabrication à raison de 2 heures par produit A et de 2 heures par produit B.

Un produit A nécessite 20 kg de matière première M, tandis qu'un produit B n'en requiert que 8 kg. Les disponibilités de matière M s'élèvent à 4 000 kg.

1. *Calculer l'optimum mensuel de production de façon à maximiser le profit global.*

2. *Un produit A procure un profit de 100 € et un produit B, un profit de 30 € ; donner une représentation graphique des contraintes et de la solution.*

3. *Donner une représentation du programme linéaire.*

Exercice 8

La société P fabrique un produit X et un produit Y, dans deux ateliers A et B.

Pour réaliser un produit X, il faut 2 heures de main-d'œuvre dans l'atelier A et 1 heure de main-d'œuvre dans l'atelier B.

Pour un produit Y, il faut 1 heure dans l'atelier A et 3 heures dans l'atelier B.

L'atelier A travaille 10 heures par jour, tandis que B fonctionne 12 heures par jour.

Les marges unitaires sont : 10 € pour X et 15 € pour Y.

1. *Déterminer la production optimale quotidienne et la marge globale correspondante.*

2. *La société doit-elle changer la structure horaire des ateliers, en imposant 11 heures de travail par jour à chaque atelier ? Justifier votre réponse.*

3. *Indépendamment de la question précédente, la Société devant réduire les horaires de travail, demande s'il convient de diminuer d'une heure par jour l'activité d'un atelier plutôt que l'autre.*

Exercice 9

Une entreprise fabrique 2 produits X_1 et X_2 dans 2 ateliers A_1 et A_2. Les informations relatives à ces deux produits sont résumées dans le tableau suivant :

	x_1	x_2	Disponibilités maximum
Temps de MOD Atelier 1	10 heures par produit	8 heures par produit	136 000 heures
Temps de MOD Atelier 2	6 heures par produit	8 heures par produit	104 000 heures
Fabrication maximum	12 000x_1	10 000x_2	
Matières utilisées par produit	1 tonne de A, 2 tonnes de B	0,5 tonne A 3 tonnes de B	12 000 tonnes A 51 000 tonnes B
Bénéfice unitaire : **1re hypothèse** **2e hypothèse**	 1 € 1 €	 1,20 € 1,50 €	

1. *Sur un même graphique, présenter les différentes contraintes exprimées ci-dessus.*

2. *À partir du graphique, déterminer le bénéfice global maximal et la solution optimale de fabrication, pour chacune des deux hypothèses de bénéfice unitaire. Justifier chaque réponse.*

Exercice 10

On désire fournir à coût minimal au moins 2 000 kg de nourriture animale (P), constituée d'un mélange à raison d'au moins 1 500 kg d'un élément A et entre 250 kg et 500 kg d'un élément B.

La fabrication se fait à partir de deux produits de base (M et N) qui ont les caractéristiques suivantes :

– le produit M contient 70 % de l'élément A, 5 % de l'élément B et 25 % d'un élément neutre : le produit M coûte 5 € au kilogramme ;

– le produit N contient 5 % de l'élément A et 95 % de l'élément B ; le produit N coûte 95 € au kilogramme.

1. *Écrire le système de contraintes du programme linéaire.*

2. *Représenter graphiquement ce système ; quelle remarque peut-on faire ?*

3. *Tracer sur le même graphique une droite représentant le coût (la fonction objective).*

Exercice 11

La Société Camille a pour objet l'extraction et la distribution de matériaux de carrière.

Elle doit assurer, pour des travaux routiers, la fourniture aux Ponts et Chaussées de graviers en divers calibres. Un marché, portant sur les quantités suivantes :

– Graviers calibre 1 .... 13 500 tonnes

– Graviers calibre 2 .... 11 200 tonnes

– Graviers calibre 3 .... 5 000 tonnes

a été adjugé pour un prix global de facturation.

La Société exploite deux carrières P_1 et P_2 louées à une société civile qui perçoit une redevance par tonne de pierres extraite. Celle-ci est la suivante :

– Pour P_1 .... 19,40 € par tonne

– Pour P_2 .... 20,00 € par tonne

Après extraction, la pierre est concassée. Les graviers ainsi obtenus sont triés selon leur calibre.

Chaque tonne de pierre fournit les quantités suivantes de graviers (exprimées en tonnes) :

– Pierre de la carrière P_1 :

  – Graviers calibre 1 .... 0,36 tonne

  – Graviers calibre 2 .... 0,40 tonne

  – Graviers calibre 3 .... 0,16 tonne

– Pierre la carrière de P_2 :
  – Graviers calibre 1 .... 0,45 tonne
  – Graviers calibre 2 .... 0,20 tonne
  – Graviers calibre 3 .... 0,10 tonne

(Le complément à une tonne représente du sable, actuellement considéré comme déchet sans valeur marchande).

La Direction souhaite définir son programme d'extraction de pierres de la carrière P_1 et de la carrière P_2 de façon à minimiser le coût des redevances à la société civile.

1. *Présenter le programme linéaire correspondant sous la forme canonique.*

2. *Donner une solution graphique.*

Exercice 12

Pour élargir sa gamme (actuellement un seul modèle de rollers pour adultes, référence CT500), le client de Madame LARUCHÈRE, la société CHANY envisage de racheter une unité de production de rollers pour enfants (référence AX200) et de rollers pour adultes de haut de gamme (référence BZ300).

1. *Sur la base de l'organisation actuelle de la production présentée en annexe :*

a. *Déterminer la marge sur coût variable unitaire de chaque type de rollers.*

b. *Calculer le résultat global.*

c. *Indiquer si les capacités actuelles de production sont bien utilisées ; justifier votre réponse en la chiffrant.*

2. *Madame LARUCHÈRE vous demande de réfléchir à la mise en place d'une autre organisation de production ayant pour objectif de maximiser la marge sur coût variable.*
Pour cela :

a. *Écrire le programme linéaire correspondant aux contraintes de production actuelles.*

b. *Présenter le premier tableau permettant la résolution du programme linéaire par la méthode du simplexe.*

3. *Le responsable de la société CHANY retient le programme correspondant au tableau obtenu par la méthode du simplexe, donné en annexe ; cette solution lui permettra de produire et de commercialiser les trois types de rollers, comme il le souhaite en fonction de la politique commerciale de l'entreprise.*

a. *Indiquer pourquoi le tableau donné en annexe ne correspond pas à l'organisation économiquement optimale.*

b. *Déduire du tableau de l'annexe, les quantités à produire de chaque type de rollers correspondant à la solution retenue par le responsable.*

c. *Dans ce cas, indiquer quel est l'état de saturation des contraintes de production.*

d. *Calculer de résultat global de l'organisation retenue.*

4. *Quel type de logiciel outil non spécialisé permettrait de résoudre ce problème ? Justifier votre réponse.*

Annexe

Organisation de la nouvelle unité de fabrication de rollers

– Production et ventes annuelles de paires de rollers :

	Rollers AX 200	Rollers BZ 300	Rollers CT 500
Quantités produites et vendues	2 000	400	280
Prix de vente d'une paire	250 € HT	400 € HT	800 € HT

– Renseignements relatifs aux coûts :

	Rollers AX 200	Rollers BZ 300	Rollers CT 500
Charges variables de production (pour 1 paire)	105	210	420
Charges variables de distribution (pour 1 paire)	10 % du prix de vente		
Charges fixes totales	300 000 €		

– Standards de production pour une paire :

	Rollers AX 200	Rollers BZ 300	Rollers CT 500
Consommation de matières premières (en kg)	4	4	16
Temps de fabrication (MOD) en minutes	15	20	40
Temps d'utilisation des machines en minutes	6,75	3,75	15

– Les contrats d'approvisionnement en matières premières permettent une consommation maximale de 19 200 kg (1 hg = 1 hectogramme = 100 grammes).
– Il n'y a pas de contrainte concernant l'approvisionnement en fournitures.
– Le temps de main d'œuvre directe disponible pour la production est de 900 heures.
– La capacité de l'atelier de production est de 320 heures machine.

Exercice 13

Une entreprise fabrique trois produits P1, P2 et P3 à partir de trois composants C1, C2 et C. Les composants sont acheminés vers l'usine par l'intermédiaire d'une société de transport qui facture le coût de transport à l'unité.

Les données sont rassemblées dans les tableaux ci-dessous.

	Produits		
	P_1	P_2	P3
Nombre de composants C1	1	2	4
Nombre de composants C2	2	1	2
Nombre de composants C3	3	2	2

On lit par exemple : pour fabriquer une unité de produit P3, il faut 4 composants C1, 4 composants C2 et 2 composants C3.

	C1	C2	C3
Coût unitaire hors transport (en euros)	20	25	15
Coût unitaire de transport (en euros)	7	6	5

Les contraintes d'approvisionnement sont telles que l'entreprise dispose, chaque semaine, de 70 composants C1, 80 composants C2 et 60 composants C3.

Les marges sur coûts variables unitaires sont de 3 € pour P1, 5 € pour P2 et 6 € pour P3.

On note respectivement x, y et z les nombres d'unités de P1, P2 et P3 fabriquées au cours d'une semaine.

1. *Présenter la forme canonique du programme linéaire permettant de maximiser la marge sur coûts variables hebdomadaire.*

2. *Un logiciel, résolvant le problème par la méthode du simplexe, fournit les tableaux suivants :*

Tableau 1	x	y	z	e_1	e_2	e_3	S
e_1	1	2	4	1	0	0	70
e_2	2	1	2	0	1	0	80
e_3	3	2	2	0	0	1	60
Z	3	5	6	0	0	0	0

Tableau 2	x	y	z	e_1	e_2	e_3	S
z	0,25	0,5	1	0,25	0	0	17,5
e_2	1,5	0	0	– 0,5	1	0	45
e_3	2,5	1	0	– 0,5	0	1	25
Z	1,5	2	0	– 1,5	0	0	– 105

Tableau 3	x	y	z	e_1	e_2	e_3	S
z	– 1	0	1	0,5	0	– 0,5	5
e_2	1,5	0	0	– 0,5	1	0	45
y	2,5	1	0	– 0,5	0	1	25
Z	– 3,5	0	0	– 0,5	0	– 2	– 155

a. *Préciser, pour le premier tableau, en justifiant les choix effectués, la variable entrante, la variable sortante et le pivot.*

b. *Quelle particularité du tableau 3 montre que l'optimum est atteint ?*

c. *Quel est le programme optimal de production ? Quelle est la marge correspondante ?*

d. *Si l'entreprise fabrique le programme optimal, combien reste-t-il de composants de chaque sorte ?*

Exercice 1

1. Formulation du programme linéaire

Si on appelle x_1 le nombre de séries de 100 pièces A à fabriquer et x_2 le nombre de séries de 100 pièces B à fabriquer, on peut écrire :

(1) $2x_1 + x_2 \leq 200$ (contrainte de l'atelier T_1)

(2) $x_1 + 4{,}5x_2 \leq 540$ (contrainte de l'atelier T_2)

(3) $4x_1 + 3x_2 \leq 480$ (contrainte de l'atelier T_3)

Avec : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

On peut résumer les éléments du programme linéaire dans le tableau ci-après :

Ateliers	Pièces série A	Pièces série B	Contraintes	Capacités
Atelier T_1	$2x_1$	x_2	$2x_1 + x_2$	200
Atelier T_2	x_1	$4{,}5x_2$	$x_1 + 4{,}5x_2$	540
Atelier T_3	$4x_1$	$3x_2$	$4x_1 + 3x_2$	480

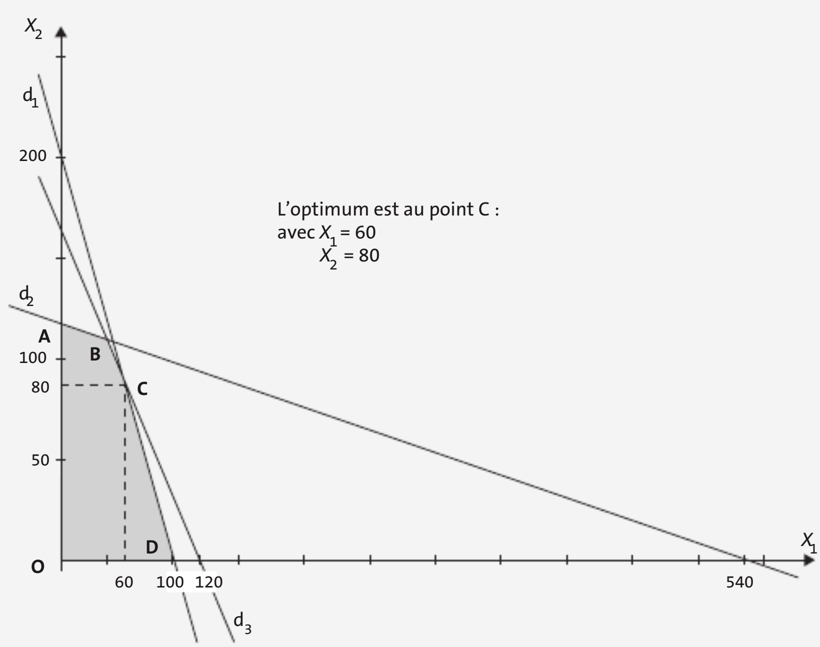
2. Résolution graphique et algébrique

En supposant les capacités de production saturées, nous pouvons écrire :

$$d_1 : 2x_1 + x_2 = 200$$

$$d_2 : x_1 + 4{,}5x_2 = 540$$

$$d_3 : 4x_1 + 3x_2 = 480$$



La droite représentant la fonction objective est :

$$D : x_2 = -\frac{5}{3}x_1$$

Une fois formulées, il s'agit maintenant de résoudre les trois inéquations.

Résoudre les trois inéquations simultanément consiste à déterminer dans un premier temps, les coordonnées des inéquations.

Résolution graphique : En supposant les capacités saturées, nous pouvons écrire :

$$y_1 : 2x_1 + x_2 = 200 \qquad (d_1)$$
$$y_2 : x_1 + 4{,}5x_2 = 540 \qquad (d_2)$$
$$y_3 : 4x_1 + 3x_2 = 480 \qquad (d_3)$$

Coordonnées des trois droites :

Ateliers	Droites d'équation	x_1	x_2
Atelier T_1	$d_1 : 2x_1 + x_2 = 200$	$x_1 = 0 ; x_2 = 200$	$x_2 = 0 ; x_1 = 100$
Atelier T_2	$d_2 : x_1 + 4{,}5x_2 = 540$	$x_1 = 0 ; x_2 = 120$	$x_2 = 0 ; x_1 = 540$
Atelier T_3	$d_3 : 4x_1 + 3x_2 = 480$	$x_1 = 0 ; x_2 = 160$	$x_2 = 0 ; x_1 = 120$

Détermination de la marge sur coût variable

Sachant que les coefficients de la fonction objective Z sont représentés par la marge sur coût variable, on peut déterminer les marges respectives dans le tableau suivant :

Éléments de calcul	Nombre d'unités de A (par série de 100 pièces)		Nombre d'unités de B (par série de 100 pièces)	
Prix de vente	138 €		136 €	
Coût variable				
Atelier T_1	10 × 2 = 20 €		10 × 1 = 10	
Atelier T_2	12 × 1 = 12 €	**88**	12 × 4,5 = 54 €	**106**
Atelier T_3	14 × 4 = 56 €		14 × 3 = 42 €	
Marge unitaire = Prix de vente – coût variable	138 – 88 = 50 €		136 – 106 = 30 €	

Détermination de la fonction économique :

La fonction objective aura pour expression : $Z = 50x_1 + 30x_2$.

Elle aura pour coefficient directeur – 5 / 3.

$$\rightarrow x_2 = -\frac{5}{3}x_1$$

La fonction économique d'équation $x_2 = -\frac{5}{3}x_1$ peut être tracée à partir de deux points suivants :

(0,0) et (100, – 166,67)

Une fois tracée, pour identifier l'optimum, on déplace la droite D : $x_2 = -\frac{5}{3}x_1$ parallèlement à elle-même dans la zone d'acceptabilité jusqu'au point le plus éloigné du champ de solution.

3. Nombre de pièces A et B par série de 10 à produire

Le point C ayant pour coordonnées ($x_1 = 60$; $x_2 = 80$) correspond au point le plus éloigné de l'origine, et donc produire 60 unités de A (par série de 100 pièces) et 80 unités de B (par série de 100 pièces représente la combinaison productive qui procure une marge maximale de : 50 × 600 + 30 × 80 = 5 400 €.

Exercice 2

1. La résolution graphique du programme linéaire est impossible car le programme linéaire comprend plus de deux variables : y_1, y_2 et y_3

2. Formulation du programme dual

$$\text{Max } Z = 120x_1 + 90x_2$$

Avec les contraintes suivantes :

$$6x_1 + 2x_2 \leq 120$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 132$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exercice 3

1. Formalisation du programme de production

En tenant compte des contraintes de fabrication et de la marge à maximiser, on présente donc le programme de production sous formes d'équations en introduisant des variables d'écart (e_1 et e_2), qui correspondent aux temps (en heures) non consommés dans les ateliers (A1 et A2).

Forme canonique du programme linéaire :

$$\text{Maximiser } 20x_1 + 10x_2$$

$$x_1 \text{ et } x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 200$$

$$3x_1 + x_2 \leq 150$$

2. Forme standard du programme linéaire

$$\text{Maximiser } 20x_1 + 10x_2 + e_1 + e_2$$
$$2x_1 + 2x_2 + e_1 = 200$$
$$3x_1 + x_2 + e_2 = 150$$
$$x_1, x_2, e_1 \text{ et } e_2 \geq 0$$

Remarque

Il y a autant de variables d'écart (ici e_1 et e_2) que d'inéquations.

3. Résolution du programme

Dans la situation de départ, on dispose de 200 heures dans l'atelier 1 et 150 heures dans l'atelier 2 et on considère la production comme nulle (0 produit x_1 et x_2). La marge totale est donc nulle… Cette situation est résumée dans ce premier tableau

	x_1	x_2	e_1	e_2	Total	Rapport
e_1	2	2	1	0	200	100
e_2	**3**	1	0	1	150	**50**
Marges	**20**	10	0	0	0	

Pour la colonne pivot : le produit x_1 a une *marge supérieure*, soit 20 €, à celle du produit x_2. On va donc privilégier x_1.

Pour la ligne pivot : dans l'atelier e_1 on peut fabriquer 100 produits x_1 mais on est limité à 50 dans l'atelier e_2.

Le pivot du problème est à l'intersection : l'élément **3**.

On va donc maintenant considérer x_1 comme une ressource : on dit que x_1 « *entre dans la base* » et que e_2 « *sort de la base* », la ligne e_2 disparaît et laisse place à la ligne x_1.

	x_1	x_2	e_1	e_2	Total	Rapport
e_1	0	4 / 3	1	– 2 / 3	100	75
x_1	1	1 / 3	0	1 / 3	50	150
Marges	0	10 / 3	0	– 20 / 3	– 1 000	

Calcul des nouveaux éléments du tableau :

– Première ligne : élément de la ligne 1 diminué de l'élément correspondant sur la ligne de pivot multiplié par 2 / 3.

– Seconde ligne (ligne du pivot) : élément ligne 2 divisé par le pivot (3).

– Troisième ligne : élément ligne 3 diminué de l'élément correspondant (même colonne) de la ligne de pivot multiplié par 20 / 3 (20).

On n'atteint la solution optimale que lorsque tous les éléments de la marge sont négatifs ou nuls. Il faut donc continuer (car il reste 10 / 3 dans la colonne x_2)… Ici, on atteint déjà l'optimum au troisième tableau, mais ce n'est pas une généralité.

	x_1	x_2	e_1	e_2	Total	Rapport
x_2	0	1	3 / 4	– 1/2	75	
x_1	1	0	– 1/4	1 / 2	25	
Marges	0	0	– 2,5	– 5	– 1 250	

4. Solution du problème

Le processus est terminé car toutes les marges unitaires qui résulteraient d'une nouvelle substitution sont négatives. Le programme optimum est *25* x_1 *et 75* x_2 pour un résultat de *1 250 euros* (25 × 20 € + 75 × 10 €).

Remarque

– Lorsqu'une variable d'écart reste dans la base et que le processus est terminé, cela signifie qu'elle n'est pas saturée.

– Dans le cas de la maximisation, les coefficients de la fonction sont tous négatifs, les variables hors base sont négatives et les variables en base sont nulles.

– Dans le cas de la minimisation, les coefficients de la fonction sont tous positifs, les variables hors base sont positives et les variables en base sont nulles.

Exercice 4

1. Temps total de montage : $1 \times 6 + 1{,}5 \times 12 + 3 \times 12 = 60$ heures.

Coût total des pièces : $80 \times 6 + 90 \times 12 + 120 \times 12 = 3\,000$ euros.

Marge totale : $32 \times 6 + 45 \times 12 + 72 \times 12 = 1\,596$ euros.

2. a. *Forme standard du problème à résoudre.*

$$\text{Maximiser } Z = 32x + 45y + 72z$$

$$\text{Avec} \begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 \\ x + y + z + e_1 = 35 \\ x + 1{,}5y + 3z + e_2 = 60 \\ 80x + 90y + 120z + e_3 = 3\,000 \end{cases}$$

b. *Résolution par la méthode du simplexe.*

	x	*y*	*z*	**e1**	**e2**	**e3**	*Bi*	**Rapport**
e1	1	1	1	1	0	0	35	35
e2	1	1,5	**3**	0	1	0	60	20
e3	80	90	120	0	0	1	3 000	25
Z	32	45	**72**	0	0	0	0	

	x	*y*	*z*	**e1**	**e2**	**e3**	*Bi*	**Rapport**
e1	2 / 3	1 / 2	0	1	– 1 / 3	0	15	30
z	1 / 3	1 / 2	1	0	1 / 3	0	20	40
e3	40	30	0	0	– 40	1	600	**20**
Z	8	**9**	0	0	– 24	0	– 1 440	

	x	*y*	*z*	**e1**	**e2**	**e3**	*Bi*
e1	0	0	0	1	1 / 3	– 1 / 60	5
z	– 1 / 3	0	1	0	1	– 1 / 60	10
y	**4 / 3**	1	0	0	– 4 / 3	1 / 30	20
Z	– 4	0	0	0	– 12	– 3 / 10	– 1 620

Conclusion

La marge est maximale si on ne produit pas de modèle A et qu'on produisait 20 modèles I et 10 modèles T.

c. *Par rapport à la solution initiale, la marge a augmenté de 24 euros (1 620 – 1 596 = 24).*

Exercice 5

1. Formulation du programme linéaire.

Soit x_1 le nombre de S en m³ et x_2 le nombre de *T* en m³.

Formulation des contraintes sous forme canonique :

(1) $3x_1 + 2x_2 \leq 400$ (contrainte de l'atelier T_1)

(2) $3x_1 + 7x_2 \leq 1\ 000$ (contrainte de l'atelier T_2)

(3) $8x_1 + 6x_2 \leq 1\ 100$ (contrainte de l'atelier T_3)

avec : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Pour la détermination des coefficients de la fonction économique, un calcul préliminaire est nécessaire : calculer les marges sur coût variable de S et de *T*.

	S				T			
Prix de vente unitaire (Pvu)				**395**				**920**
*	Q	Cvu	M		Q	Cvu	M	
Charges d'atelier								
1	3	40	120		2	40	80	
2	3	45	135		7	45	315	
3	8	60	480		6	60	360	
Coût variable unitaire (Cvu)			735	735			755	755
Marge sur coût variable unitaire MCV = Pvu – Cvu				**– 340**				**165**

La fonction économique s'écrira : Max $Z = -340x_1 + 165x_2$

2. Résolution du programme linéaire par la méthode du simplexe.

Formulation standard du programme linéaire :

(1) $3x_1 + 2x_2 + \mathbf{e_1} = 400$ (contrainte de l'atelier T_1)

(2) $3x_1 + 7x_2 + \mathbf{e_2} = 1\,000$ (contrainte de l'atelier T_2)

(3) $8x_1 + 6x_2 + \mathbf{e_3} = 1\,100$ (contrainte de l'atelier T_3)

avec : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$\text{Max } Z = -340\text{x}1 + 165\text{x}2 + \mathbf{0e_1 + 0e_2 + 0e_3}$$

– Élaboration du 1er tableau du simplexe

Variable entrante x_2

Ligne pivot

Variables	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	B_i	Rapports
e_1	3	2	1	0	0	400	400 / 2 = 200
e_2	3	7	0	1	0	1 000	1 000 / 7 = 142,86
e_3	8	6	0	0	1	1 100	1 100 / 6 = 183,33
Z	–340	165	0	0	0	0	

Variable sortante e_2

Colonne pivot

La solution de base associée à ce tableau initial est donc $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $e_1 = 400$; $e_2 = 1\,000$; $e_3 = 1\,100$. Pour cette solution, $Z = 0$. Comme les coefficients des variables hors base dans la dernière ligne ne sont pas tous nuls ou négatifs, cette solution n'est pas optimale.

On va donc effectuer une autre itération par changement de base : on choisit comme variable entrante la variable hors base ayant le coefficient le plus élevé positif dans la ligne Z, c'est-à-dire x_2. La variable sortant de l'ancienne base est celle qui a le plus petit rapport positif des seconds membres aux coefficients de la variable entrante correspondante, c'est-à-dire e_2.

Élaboration du 2e tableau (1re transformation)

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Second membre
e_1	15 / 7	0	1	– 2 / 7	0	800 / 7 = 114,29
x_2	3 / 7	1	0	1 / 7	0	1 000 / 7 = 142,86
e_3	38 / 7	0	0	– 6 / 7	1	1 700 / 7 = 242,86
Z	– 2 875 / 7	0	0	– 165 / 7	0	– 165 000 / 7 = – 23 571,43

3. Soit le tableau suivant du simplexe.

Base				x_5	x_6	Second membre
x_1	1	0	0	3 / 19	853 / 2	850 / 19
e_1	0	0	1	1 / 19	– 285 / 2	315 / 19
x_2	0	1	0	4 / 19	– 1 137 / 2	2 350 / 19
Z	0	0	0	– 60 / 19	– 17 005 / 2	– 557 750 / 19

Tous le coefficients de Z sont nuls ou négatifs. On est à l'optimum.

a. Le nombre de m³ de chaque type de produit à fabriquer est de 850 / 19 m³, soit 44,74 m³ de S et de 2 350 / 19 m³, soit 123,68 m³ de T.

b. Le nombre d'unités d'œuvre qui reste disponible dans chaque atelier est déterminé de la manière suivante :

– **Pour l'atelier 1 :** $3x_1 + 2x_2 + \mathbf{e_1} = 400$.
$e_1 = 400 – 44{,}73(3) – 123{,}68\ (2) = 16{,}58$ qui représente un sous-emploi.

– **Pour l'atelier 2 :** $3x_1 + 7x_2 + \mathbf{e_2} = 1\ 000$.
$e_2 = 1\ 000 – 44{,}73\ (3) – 123{,}68\ (7) = 0$ qui représente le plein emploi.

– **Pour l'atelier 3 :** $8x_1 + 6x_2 + \mathbf{e_3} = 1\ 100$.
$e_3 = 1\ 100 – 44{,}73\ (8) – 123{,}68\ (6) = 0$ qui représente le plein emploi.

c. La marge totale sur coûts variables obtenue Z = – 340 (850 / 19) + 165 (2 350 / 19) = 557 / 19 = 29 355,26 €.

Exercice 6

Formulation du programme linéaire :

– Les variables x_1, x_2, x_3 représentent le nombre de colis.

Nous admettrons utiliser la totalité du stock des articles A, B, et C, par conséquent, les contraintes seront écrites sous forme d'égalité.

Forme canonique du programme linéaire :

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1\,235$ (contrainte A)
(2) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4\,004$ (contrainte B)
(3) $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2\,880$ (contrainte C)

avec : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Il s'agit de résoudre algébriquement le système de trois équations à trois inconnues.

Élimination d'une inconnue (progressivement) :

(2) – (3) $= x_2 + 2x_3 = 1\,124$

(3) – [(1) × 2] $= 2\,880 - (2 \times 1\,235) \rightarrow x_3 = 410$

En remplaçant x_3 par 410, on pourra écrire : $x_2 + (2 \times 410) = 1\,124$ et donc $x_2 = 304$.

En remplaçant x_2 par 304, x_3 par 410 dans l'une des trois équations, $x_1 = 521$.

Donc le nombre de colis est le suivant :

$$\mathbf{x_3 = 410, x_2 = 304, x_1 = 521}$$

Exercice 7

Soit :

x_1 représentant le nombre de produits A.

x_2 représentant le nombre de produits B.

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

Les contraintes peuvent s'exprimer ainsi :

(1) $2{,}5x_1 + 5x_2 \leq 1\,000$ (contrainte Atelier 1)
(2) $2x_1 + 2x_2 \leq 900$ (contrainte Atelier 2)
(3) $20x_1 + 8x_2 \leq 4\,000$ (contrainte Matières premières)

Alors que la fonction objective peut s'écrire, pour chacun des cas :

Fonction objective :

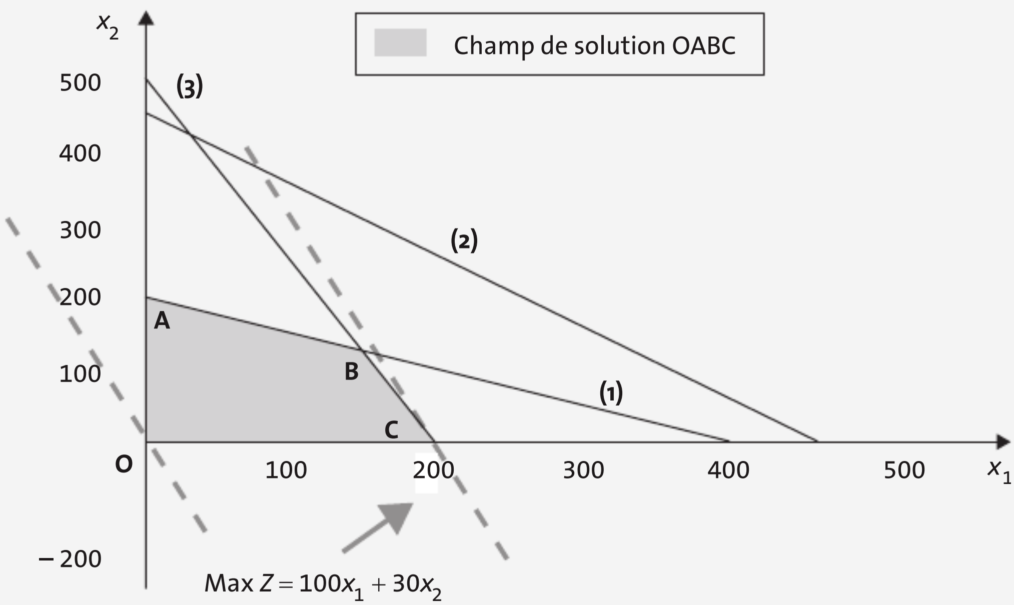
$$\text{Max } Z = 100x_1 + 30x_2$$

Solution graphique :

Les capacités de production étant supposées saturées, les coordonnées des trois inéquations sont :

(1)	$2{,}5x_1 + 5x_2 = 1\,000$	$(x_1 = 400\,;\, x_2 = 200)$
(2)	$2x_1 + 2x_2 = 900$	$(x_1 = 450\,;\, x_2 = 450)$
(3)	$20x_1 + 8x_2 = 4\,000$	$(x_1 = 200\,;\, x_2 = 500)$

Comme le montre le graphique suivant : le champ de solution est délimité par OABC.



Concernant la fonction économique, elle a pour coordonnées :

$$\text{Max } Z = 100x_1 + 30x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{100}{30}x_1$$

Elle passe par les points : (0 ; 0) et (100 ; – 333).

L'optimum est atteint au point C lequel a pour coordonnées $x_1 = 200\,;\, x_2 = 0$ et donc $Z = 100 \times 200 + 30 \times 0 =$ **20 000**.

Cela signifie que l'entreprise a intérêt à vendre uniquement des produits x_1 et pas du tout de produit x_2. Toutefois, les décisions dans l'entreprise fait intervenir plusieurs variables et c'est souvent un compromis entre plusieurs contraintes (organisationnelles, techniques, financières et humaines) qui est à la base de la décision finale.

Exercice 8

1. Formulation du programme

x_1 représentant le nombre de produits X ;

x_2 représentant le nombre de produits Y.

$$x_1 \geq 0 \,;\, x_2 \geq 0$$

(1) $2x_1 + x_2 \leq 10$ (contrainte Atelier A)

(2) $x_1 + 3x_2 \leq 12$ (contrainte Atelier B)

Fonction économique : Max Z = 10x1 + 15x2

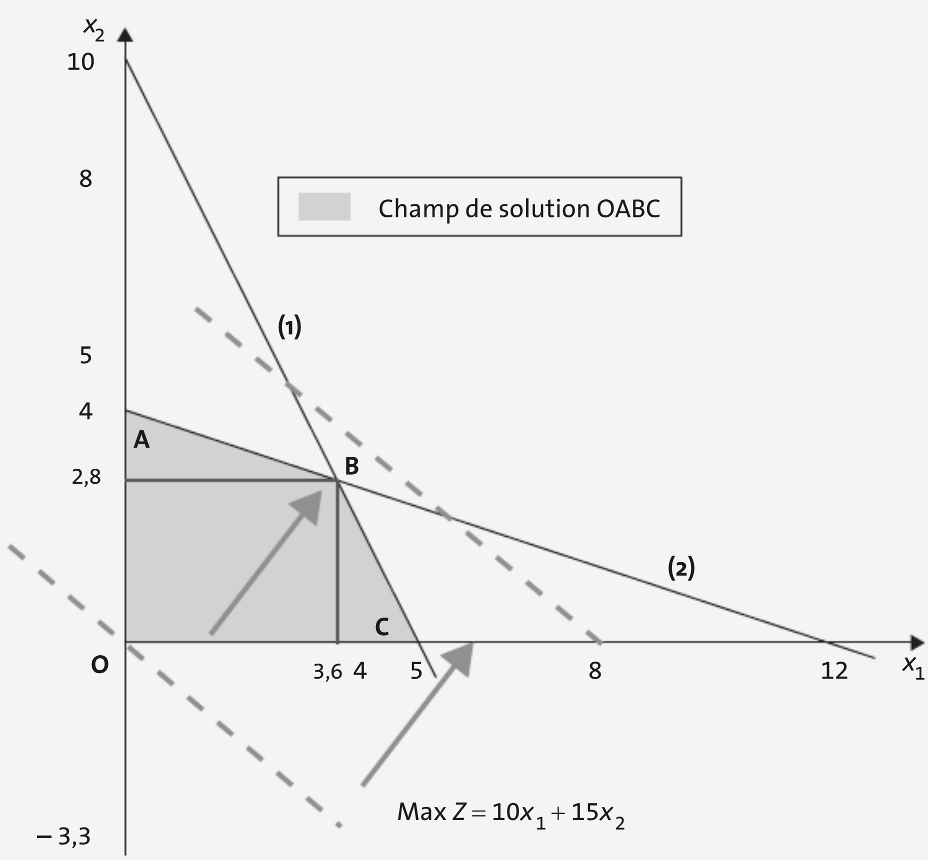
Le champ de solution est délimité par OABC où l'optimum est atteint au point B avec x_1 (Produits X) = 3,6 ; x_2 (Produits Y) = 2,8. Alors que la marge globale est égale à :

$$(3{,}6 \times 10 \text{ €}) + (2{,}8 \times 15 \text{ €}) = 78 \text{ €}$$

Dans cet exercice, il convient d'envisager les deux cas suivants :

– si les produits X et Y étaient indivisibles, l'optimum pourrait être déterminé comme suit :

– sur une période de 10 jours : $x_1 = 36$; $x_2 = 28$; $Z = 78$ (si la production en cours en fin de journée peut être reprise en l'état et poursuivie le lendemain ouvrable).



– si la production en cours en fin de journée ne peut être conservée jusqu'au lendemain ouvrable, x_1 et x_2 doivent représenter des nombres entiers de produits :

$$x_1 = 3{,}6 \qquad 3 \leq x_1 \leq 4$$
$$x_2 = 2{,}8 \qquad 2 \leq x_2 \leq 3$$

➔ 4 solutions à examiner du point de vue des contraintes à respecter et de l'objectif à atteindre.

a. $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $Z = 6$

Atelier A :

$$(2 \times 3) + (1 \times 2) = 8 \leq 10 \quad \text{(sous-emploi} = 10 - 8 = 2)$$

Atelier B :

$$(1 \times 3) + (3 \times 2) = 9 \leq 12 \quad \text{(sous emploi} = 12 - 9 = 3)$$

$$\text{Max } Z = x_1 + 1{,}5x_2 = (1 \times 3) + (1{,}5 \times 2) = 6$$

b. $x_1 = 3$; $x_2 = 3$; $Z = 7{,}5$

Atelier A :

$$(2 \times 3) + (1 \times 3) = 9 \leq 10 \quad \text{(sous-emploi} = 10 - 9 = 1)$$

Atelier B :

$$(1 \times 3) + (3 \times 3) = 12 \leq 12 \quad \text{(plein-emploi} = 12 - 12 = 0)$$

$$\text{Max } Z = x_1 + 1{,}5x_2 = (1 \times 3) + (1{,}5 \times 3) = 7{,}5$$

Cette solution est meilleure que la précédente 7,5 > 6.

c. $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $Z = 7$

Atelier A :

$$(2 \times 4) + (1 \times 2) = 10 \leq 10 \quad \text{(plein-emploi} = 10 - 10 = 0)$$

Atelier B :

$$(1 \times 4) + (3 \times 2) = 10 \leq 12 \quad \text{(sous emploi} = 12 - 10 = 2)$$

$$\text{Max } Z = x_1 + 1{,}5x_2 = (1 \times 4) + (1{,}5 \times 2) = 7$$

Cette solution est moins bonne que la précédente 7 < 7,5.

d. $x_1 = 4$; $x_2 = 3$ (contraintes non respectées)

Atelier A :

$$(2 \times 4) + (1 \times 3) = 11 > 10 \quad \text{(contrainte non respectée)}$$

Atelier B :

$$(1 \times 4) + (3 \times 3) = 13 > 12 \quad \text{(contrainte non respectée)}$$

Si une des contraintes n'est pas respectée, la solution envisagée est inacceptable.

Conclusion

La solution (b) est la meilleure avec et Max $Z = 7{,}5$ si les produits sont indivisibles et la production en cours définitivement perdue.

Le manque à gagner s'élève alors par jour à : 7,8 – 7,5 = 0,3.

2. La société doit-elle changer la structure horaire des ateliers, en imposant 11 heures par atelier ?

Non, la société ne doit pas changer la structure horaire des ateliers, étant donné que Max Z diminue.

Nouvelles contraintes :

(1) $2x_1 + x_2 \leq 11$ (contrainte Atelier A)

(2) $x_1 + 3x_2 \leq 11$ (contrainte Atelier B)

Nouvel optimum :

$$\boldsymbol{x_1 = 4{,}4\,;\ x_2 = 2{,}2 \quad \text{Max } Z = 7{,}7}$$

Le nouvel optimum serait inférieur à l'ancien optimum.

Les changements horaires préconisés impliqueraient un manque à gagner de 7,8 – 7,7 = 0,1 et ne seraient donc pas à entreprendre. Si les produits sont indivisibles et la production en cours perdue d'un jour à l'autre, le nouvel optimum correspondrait à la solution C et le manque à gagner s'élève à : 7,5 – 7 = 0,5.

En conclusion, il ne faudrait donc pas travailler 11 heures par jour dans chaque atelier.

3. Convient-il de diminuer d'une heure par jour l'activité d'un atelier plutôt que l'autre. Quel atelier ?

1er cas : atelier A

Les nouvelles contraintes sont :

(1) $2x_1 + 1x_2 \leq 9$ (contrainte Atelier A)

(2) $x_1 + 3x_2 \leq 12$ (contrainte Atelier B)

avec un nouvel optimum au point D avec $x_1 = 3$; $x_2 = 3$ et Z = 7,5.

2e cas : atelier B

(1) $2x_1 + 1x_2 \leq 10$ (contrainte Atelier A)

(2) $x_1 + 3x_2 \leq 11$ (contrainte Atelier B)

Le nouvel optimum serait le point E avec x1 = 3,8 ; x2 = 2,4 et Z = 7,4.

Conclusion

S'il fallait réduire d'une heure l'activité d'un atelier, il serait préférable de réduire celle de l'atelier B (7,5 > 7,4).

Exercice 9

1. Formulation du programme :

x_1 représentant le nombre de produits X_1 ;

x_2 représentant le nombre de produits X_2.

(1)	$10x_1 + 8x_2 \leq 136\,000$	(contrainte Atelier 1)
(2)	$6x_1 + 8x_2 \leq 104\,000$	(contrainte Atelier 2)
(3)	$x_1 \leq 12\,000$	
(4)	$x_2 \leq 10\,000$	
(5)	$1x_1 + 0{,}5x_2 \leq 12\,000$	
(6)	$2x_1 + 3x_2 \leq 51\,000$	
	$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$	

Avec 1re hypothèse : Max $Z_1 = x_1 + 1{,}2x_2$.

La représentation graphique de la première hypothèse est la suivante avec le détail des coordonnées de chaque sommet du polygone délimité par la zone d'acceptabilité.

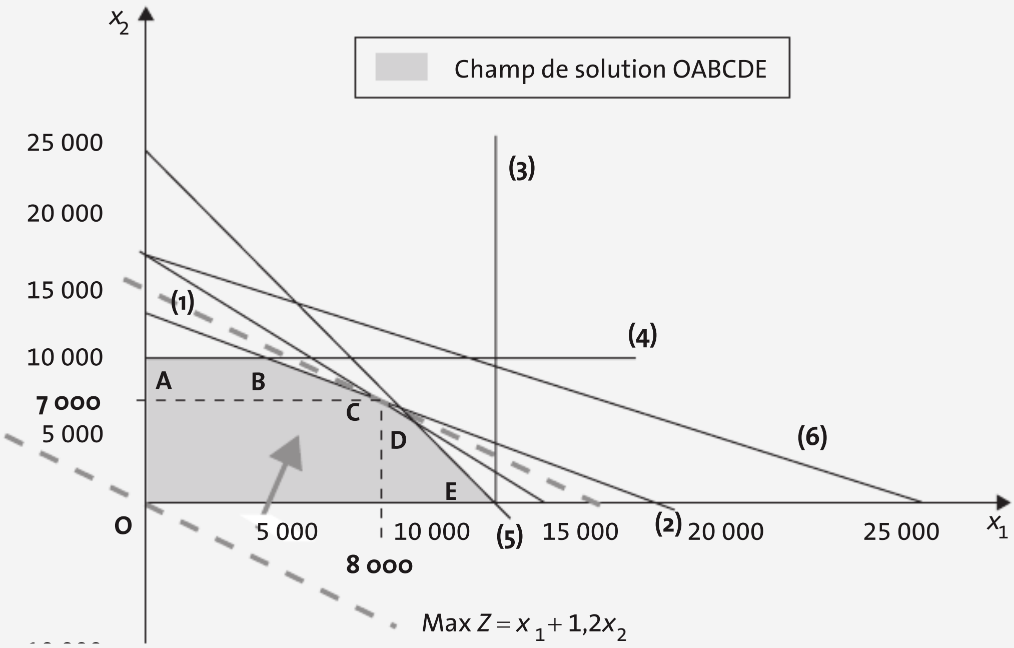
(1)	$10x_1 + 8x_2 \leq 136\,000$	Coordonnées : $x_1 = 13\,600$; $x_2 = 17\,000$
(2)	$6x_1 + 8x_2 \leq 104\,000$	Coordonnées : $x_1 = 17\,333$; $x_2 = 13\,000$
(3)	$x_1 \leq 12\,000$	Coordonnées : $x_1 = 12\,000$
(4)	$x_2 \leq 10\,000$	Coordonnées : $x_2 = 10\,000$
(5)	$1x_1 + 0{,}5x_2 \leq 12\,000$	Coordonnées : $x_1 = 12\,000$; $x_2 = 24\,000$
(6)	$2x_1 + 3x_2 \leq 51\,000$	Coordonnées : $x_1 = 25\,500$; $x_2 = 17\,000$

Détermination des coordonnées de la fonction économique Max $Z = x_1 + 1{,}2x_2$.

Cette droite a pour équation Max $Z = 0 \Rightarrow x_1 + 1{,}2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{1{,}2}x_1$.

Elle passe par les coordonnées suivantes : (0 ; 0) et (10 000 ; – 8 333).

Le champ de solution est délimité par OABCDE.



Comme le montre le graphique, l'optimum se trouve au point C qui se trouve à l'intersection du système formé par les équations (1) et (2) :

$$10x_1 + 8x_2 = 136\ 000$$

$$6x_1 + 8x_2 = 104\ 000$$

La résolution donne : $x_1 = 8\ 000$; $x_2 = 7\ 000$ avec **Z** = **8 000** + **1,2 (7 000)** = **16 400 €**.

La droite $Z_{16\ 400} = 1x_1 + 1{,}2x_2$ coupe les axes avec $x_1 = 16\ 400/1 = 16\ 400$ et $x_2 = 16\ 400/1{,}2 = 13\ 666{,}33$ (voir graphique).

Avec la 2e hypothèse : Max $Z_2 = x_1 + 1{,}5x_2$.

L'optimum se trouve au pont B qui se trouve à l'intersection du système formé par les inéquations (2) et (4) :

Les coordonnées de B par résolution du système suivant :

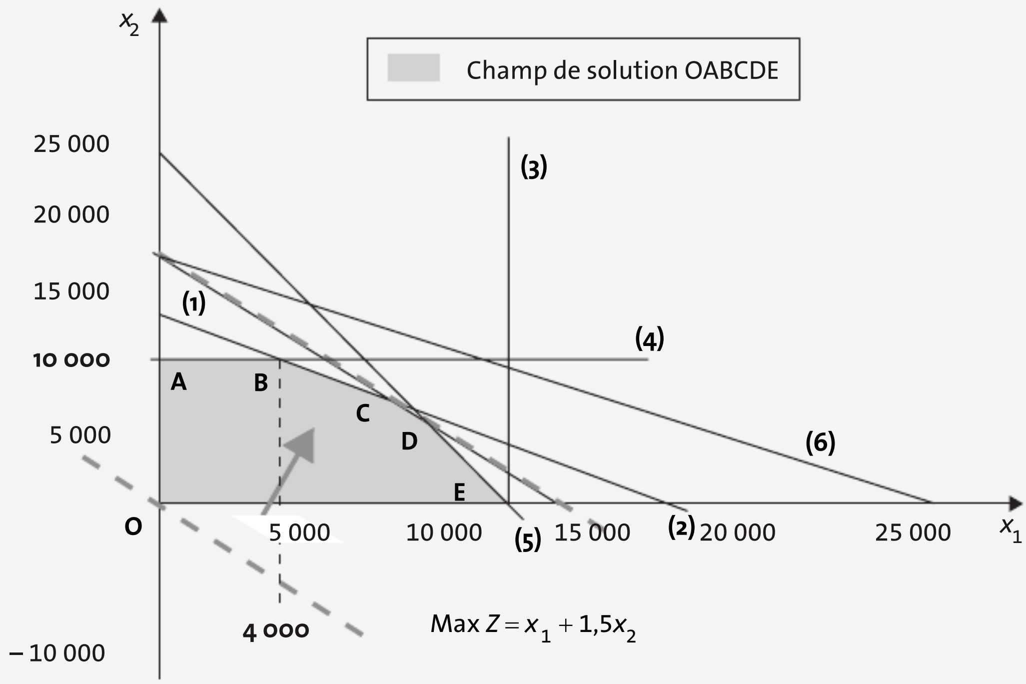
$$x_2 \leq 10\ 000$$

$$6x_1 + 8x_2 \leq 104\ 000$$

Ce qui donne : $x_1 = 4\ 000$; $x_2 = 10\ 000$.

Max Z = (1 × 4 000) + (1,5 × 10 000) = 19 000 €

La droite $Z_{19\ 000}$ coupe les axes aux coordonnées $x_1 = 19\ 000 / 1 = 19\ 000$ et $x_2 = 19\ 000 / 1{,}5 = 12\ 666{,}33$.



Exercice 10

L'objectif est : « minimiser le coût d'achat total de produits M et N, de façon à fournir 2 000 kg de nourriture animale comprenant au moins 1 500 kg d'un élément A et entre 250 et 500 kg d'un élément B ».

Les quantités de produits M et N sont inconnues et seront respectivement représentées par les abréviations y_1 et y_2 (exprimées en kilogrammes).

1. Système de contraintes :

y_1 représentant le nombre de produits M ;

y_2 représentant le nombre de produits N.

$y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$

(1) $\mathbf{0{,}7y_1 + 0{,}05y_2 \geq 1\,500}$

1 kg de M contient 0,70 kg de A ;

1 kg de N contient 0,05 kg de A.

(2) $\mathbf{0{,}05y_1 + 0{,}95y_2 \geq 250}$

(3) $\mathbf{0{,}05y_1 + 0{,}95y_2 \leq 500}$

1 kg de M contient 0,05 kg de B ;

1 kg de N contient 0,95 kg de B ;

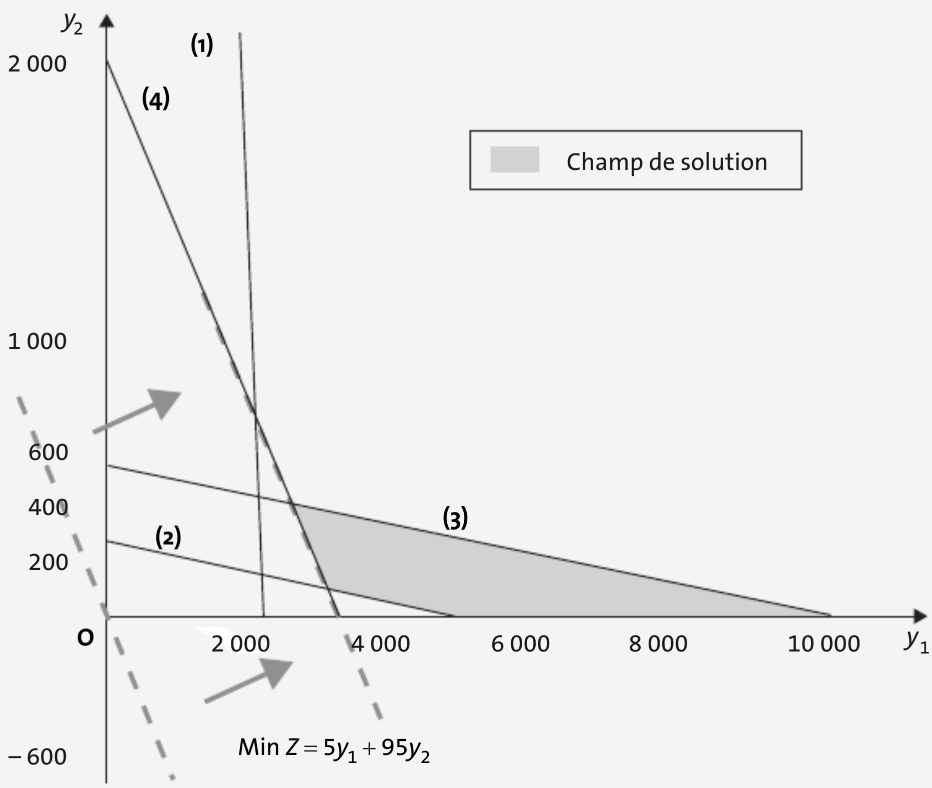
et la quantité nécessaire se situe entre 250 et 500.

(4) **0,75y1 + y2 ≥ 2 000**

1 kg de M contient 0,70 + 0,05 = 0,75 kg de nourriture animale ;
1 kg de N contient 0,05 + 0,95 = 1 kg de nourriture animale.

$$\text{Min } Z = 5y_1 + 95y_2$$

2. Représentation graphique :



(1)	$0{,}7y_1 + 0{,}058y_2 \geq 1\,500$	($y_1 = 2\,143$; $y_2 = 25\,862$)
(2)	$0{,}05y_1 + 0{,}95y_2 \geq 250$	($y_1 = 5\,000$; $y_2 = 263$)
(3)	$0{,}05y_1 + 0{,}95y_2 \geq 500$	($y_1 = 10\,000$; $y_2 = 526$)
(4)	$0{,}75y_1 + y_2 \geq 2\,000$	($y_1 = 2\,667$; $y_2 = 2\,000$)

$$\text{Min } Z = 5y_1 + 95y_2$$

Les coordonnées de la fonction économique seront (0 ; 0) et (500 ; – 9 500).

Remarque

1) La contrainte (1) est redondante (redondance intérieure par rapport à la contrainte (4). En conséquence, la contrainte (1) peut être supprimée du système de contraintes.
2) Le point origine (0) n’appartient pas au domaine des solutions acceptables.
3) Les droites de contraintes (2) et (3) sont parallèles (coefficients égaux).

Exercice 11

y_1 représentant le nombre de tonnes de la carrière P_1 à extraire ;

y_2 représentant le nombre de tonnes de la carrière P_2 à extraire.

$$y_1 \geq 0 \,;\, y_2 \geq 0$$

(1) $\quad 0{,}36y_1 + 0{,}45y_2 \geq 13\,500$

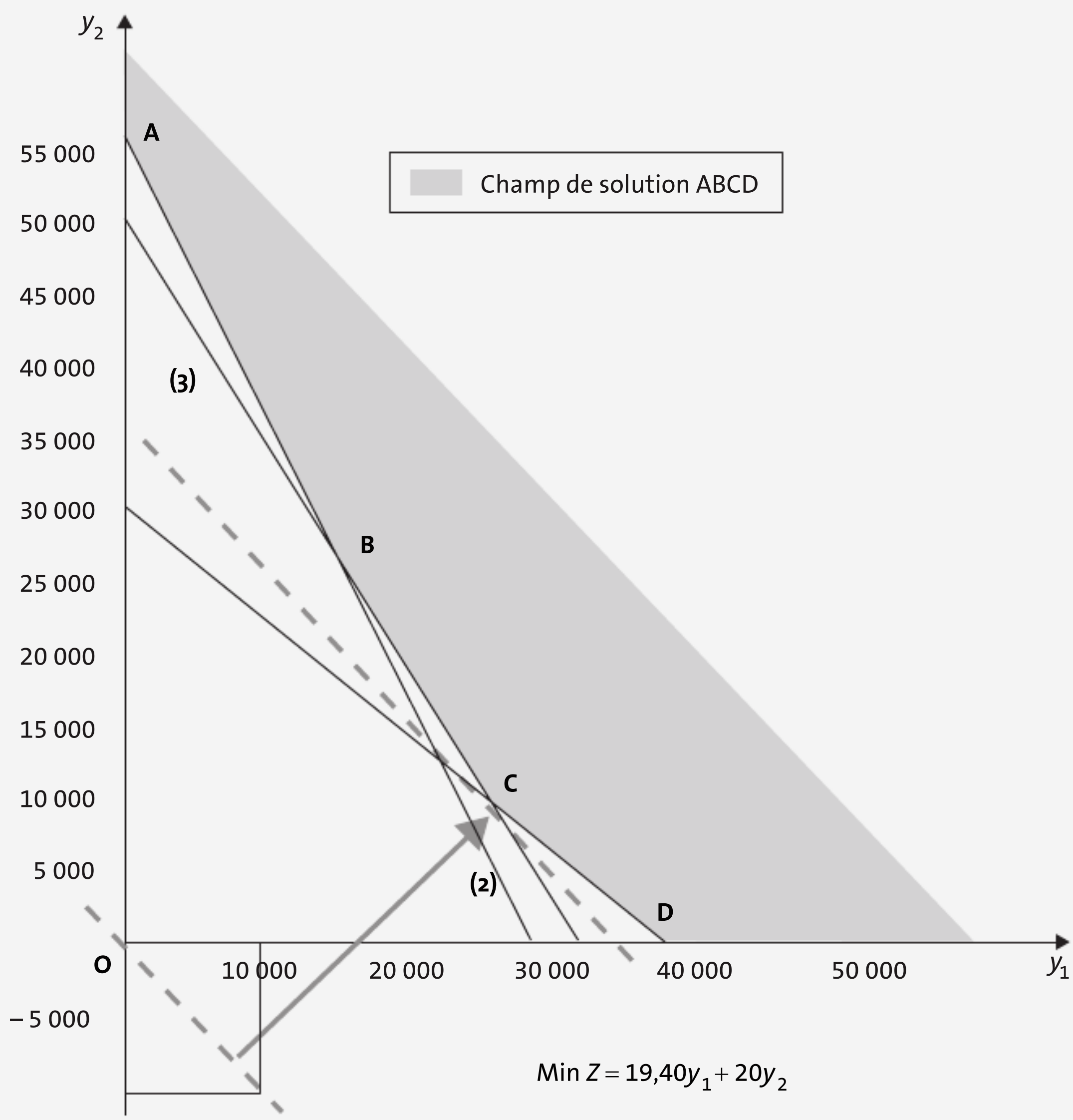
(2) $\quad 0{,}40y_1 + 0{,}20y_2 \geq 11\,200$

(3) $\quad 0{,}16y_1 + 0{,}10y_2 \geq 5\,000$

$$\text{Min } Z = 19{,}40y_1 + 20y_2$$

Dans la mesure où il s'agit de minimiser un coût, la zone de solution ou d'acceptabilité se trouve à droite des points ABCD. Le coût minimum correspond au point le plus proche de l'origine.

Solution graphique :



Les coordonnées des droites de contraintes :

(1) $0{,}36y_1 + 0{,}45y_2 = 13\,500$

$y_1 = 0 \qquad y_2 = 30\,000$

$y_2 = 0 \qquad y_1 = 37\,500$

(2) $0{,}40y_1 + 0{,}20y_2 = 11\,200$

$y_1 = 0 \qquad y_2 = 56\,000$

$y_2 = 0 \qquad y_1 = 28\,000$

(3) $0{,}16y_1 + 0{,}10y_2 = 5\,000$

$y_1 = 0 \qquad y_2 = 50\,000$

$y_2 = 0 \qquad y_1 = 31\,250$

Vérification algébrique

L'optimum est au point C avec pour coordonnées $y_1 = 25\,000$; $y_2 = 10\,000$.

Et Z = 19,4 × 25 000 + 20 × 10 000 = 685 000 €.

En calculant le coût total Z au niveau de chaque sommet ABCD, nous obtenons les résultats suivants :

Sommets	y_1	y_2	$Z = 19{,}40y_1 + 20y_2$
A	0	56 000	Z = 1 120 000 €
B	15 000	26 000	Z = 811 000 €
C	25 000	10 000	**Z = 685 000 €**
D	37 500	0	Z = 727 500 €

La combinaison $y_1 = 25\,000$ et $y_2 = 10\,000$ est bien la solution optimale car elle minimise le coût total.

Exercice 12

1. a *Marge sur coût variable :*

	AX 200	BZ 300	CT 500
Prix de vente unitaire	250	400	800
Charges variables de production unitaires	105	210	420
Charges variables de distribution unitaires	25	40	80
Marge sur coût variable unitaire	120	150	300

b. *Résultat global :* (120 × 2 000) + (150 × 400) + (300 × 280) – 300 000 = 84 000 €.

c. *Contraintes de production :*

	Capacité utilisée		Capacité maximale	Diff.
Matières premières	(4 × 2 000) + (4 × 400) + (16 × 280) =	14 080	19 200	5 120
Main d'œuvre directe	(15 × 2 000) + (20 × 400) + (40 × 280) =	49 200	54 000	4 800
Temps machine	(6,75 × 2 000) + (3,75 × 400) + (15 × 280) =	19 200	19 200	0

Les machines compte tenu de l'organisation de la production actuelle sont utilisées à 100 % de leur capacité. Les deux autres contraintes n'étant pas saturées.

2. a. *Programme linéaire de production :*

$$4A + 4B + 16C \leq 19\,200$$

$$15A + 20B + 40C \leq 54\,000$$

$$6{,}75A + 3{,}75B + 15C \leq 19\,200$$

$$\text{MAX } [M / CV] = 120A + 150B + 300C$$

b. *Tableau 1 :*

	A	B	C	e_1	e_2	e_3	
e_1	4	4	16	1	0	0	19 200
e_2	15	20	40	0	1	0	54 000
e_3	6,75	3,75	15	0	0	1	19 200
	120	150	300	0	0	0	0

3. a. *L'organisation est* ***non optimale*** *car le dernier tableau ne doit pas présenter de valeur de variable positive dans la fonction économique.*

b. *Programme de production retenu*

A = 400 paires

B = 400 paires

C = 1 000 paires

c. *État de saturation des contraintes de production :*

	Capacité utilisée		Capacité maximale	Diff.
Matières premières	(4 × 400) + (4 × 400) + (16 × 1 000) =	19 200	19 200	0
Main d'œuvre directe	(15 × 400) + (20 × 400) + (40 × 1 000) =	54 000	54 000	0
Temps machine	(6,75 × 400) + (3,75 × 400) + (15 × 1 000) =	19 200	19 200	0

Les contraintes sont toutes saturées.

Le calcul n'est pas nécessaire. Les variables e_1, e_2, e_3 étant hors base, elles sont nulles, donc les contraintes correspondantes sont saturées.

d. *Résultat global :*

$$(120 \times 400) + (150 \times 400) + (300 \times 1\,000) - 300\,000 = 108\,000 \text{ €}$$

4. Il peut s'agir d'un tableur en utilisant les fonctionnalités de type « solveur » (définition de contraintes de programmation) ou les fonctions de calcul du tableur.

Exercice 13

1. La forme canonique est :

$$\mathrm{Max}(3x + 5y + 6z)$$
$$x + 2y + 4 \leq 70$$
$$2x + y + 2z \leq 80$$
$$3x + 2y + 2z \leq 60$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0$$

2. a. *Dans le premier tableau, la variable entrante est z car le plus grand coefficient positif de la ligne Z est 6.*
Si on divise terme à terme les coefficients de la colonne S par ceux de la colonne z, *le plus petit quotient positif est le premier* (70 / 4 = 17,5), correspondant à la variable sortante e_1. Le pivot est *l'intersection de ces deux rangées* soit le terme **4**.

b. *L'optimum est atteint dans le tableau 3 car tous les coefficients de la ligne Z sont négatifs ou nuls.*

c. *Le programme optimal de production est x = 0 ; y = 25 ; z = 5. Sa marge est* ***155 €***

d. *Si l'entreprise fabrique le programme optimal, il ne lui reste que* ***45 composants*** *e_2 (et aucun e_1, aucun e_3).*